N°4 http://www.posmatematica.ufv.br/pt/
JMat UFV
17 de Dezembro de 2019 || 15:29h

Encontros UFV-UFJF e o Dia da Matemática IV

Dois Encontros em Sistemas Dinâmicos e o 4ª Dia da Matemática, respectivamente, nos dias 29/04, 18/06 e 09/05 de 2019, foram realizados com successo. Os encontros dos professores da área de sistemas dinâmicos foram coordenados pelo Prof. Alexandre Miranda (UFV) e pelo Prof. José Barbosa (UFJF) e, no Dia da Matemática, além de docentes do DMA, nos brindaram com palestras, os professores visitantes, Gugu (IMPA), Marcos Craizer (PUC-Rio) e Hugo. D. Fernández Sare (UFJF). Agradecemos a todos os participantes.


A. Lemos


A. M. Alves


C. Mendes


M. Guerreiro

*Graphs and closed surfaces associated to pairing of edges of regular polygons,

C. M. de Jesus S.; P. D. Romero; *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society,* 2019. (*Classif. CAPES: A2*).

In this paper we define the concept of graph extension embedded on a closed and orientable surfaces, associated to pairing of edges of regular polygons in order to show that the K-regular pairing of edges graphs can be obtained by the canonical extension of graphs (graphs with a single vertex). We present examples of K-regular graphs associated to surfaces with genus $g \leq 3$.

*From ds-Bounds for Cyclic Codes to True Minimum Distance for Abelian Codes,

J.J. Bernal; M. Guerreiro; J.J. Simon; *IEEE Transactions on Information Theory*, 2019. (*Classif. CAPES: A2*).

In this paper we developed a technique to extend any bound for the minimum distance of cyclic codes constructed from its defining sets (ds-bounds) to Abelian (or multivariate) codes through the notion of $\mathbb{B}$-apparent distance. We also study conditions for an Abelian code to verify that its $\mathbb{B}$-apparent distance reaches its (true) minimum distance. Then we construct some codes as applications.

*Geometric limits of Julia sets and connectedness locus of the family of polynomials $P_c(z) = z^n + cz^k$

A. M. Alves; *Dynamical Systems,* 2019. (*Classif. CAPES: B1*).

*On the number of fully weighted zero-sum subsequences,

A. Lemos; A. O. Moura; A. T. Silva, B. K. Moriya;*International Journal of Number Theory,* 2019. (*Classif. CAPES: B1*).

TÓPICOS PRINCIPAIS

COLABORADORES:
***Thaynara C. de C. Bento**
***Ígor S. Reis**

Carlos Gustavo Moreira (Gugu)

Uma estrela do mundo da Matemática no céu do Brasil! O DMA/UFV teve o prazer de recebê-lo em dia 09 de maio de 2019 como palestrante do evento Dia da Matemática IV.

Gugu em ICM 2018

Dia da Matemática IV-UFV

Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira nasceu em 8 de fevereiro de 1973, no Rio de Janeiro, é pesquisador titular do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), membro da Comissão Brasileira de Olimpíadas Brasileiras de Matemática, torcedor fanático do Flamengo e militante do PCB (Partido Comunista Brasileiro). Conhecido como Gugu, é mestre e doutor em Matemática pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada, sendo especialista em Sistemas Dinâmicos.

Quando terminou o ensino médio, terminou ao mesmo tempo o mestrado no IMPA. Aos 20 anos, já era doutor. Acha incrível que alguém seja pago para estudar Matemática com liberdade.

Sua pesquisa relaciona aproximações diofantinas a outras áreas da Matemática. Existe um problema fundamental que engloba frações e números reais. Números irracionais ou frações podem aproximar todos os números reais. Pi (π) é um número irracional que pode ser aproximado por um número real através de decimais: 3.14 por exemplo. Uma vez que os decimais continuariam para sempre, no entanto, nunca terá uma representação numérica real perfeita, mas é possível chegar perto usando frações específicas. Algumas frações são melhores do que outras para encontrar essas aproximações, e parte de seu trabalho mostra como alcançar essas melhores aproximações e relacioná-las a áreas da Matemática aparentemente não relacionadas, como sistemas dinâmicos, teoria do caos e geometria fractal.

Ele é também um dos escritores do livro: "Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro; Rio de Janeiro, IMPA 2010."

Os Prêmios

Gugu já foi agraciado com honrarias como o prêmio WFNMC em 1992, o prêmio Jovem Cientista na comemoração dos 45 anos do CNPq em 1996, o prêmio UMALCA, em 2009, o prêmio TWAS-Rolac a jovens cientistas da América Latina, em 2007, e o prêmio TWAS, em 2010.

Prêmio UMALCA: O prêmio da União Matemática da América Latina e Caribe (UMALCA) foi criado no ano 2000 para distinguir os jovens matemáticos mais brilhantes trabalhando na América Latina e Caribe, bem como reconhecer e estimular as suas contribuições matemáticas. O premiado do ano 2000 foi Marcelo Viana (IMPA) e o de 2004 foi Enrique Pujals (IMPA), com menções honrosas para Mario Eudave (UNAM, México) e Cláudio Landim (IMPA).

Prêmio TWAS: O prêmio TWAS é dado anualmente desde 1985 em várias áreas das ciências pela Academia de Ciências para o Mundo em Desenvolvimento (TWAS). Do Brasil, já ganharam o prêmio na Matemática os pesquisadores Maurício Peixoto, Jacob Palis, Manfredo do Carmo, Ricardo Mañé, César Camacho, Marcelo Viana, Welington de Melo e Claudio Landim, todos do IMPA.

Prêmio WFNMC: Carlos Augusto também foi ganhador do Prêmio Paul Erdös da Federação Mundial de Competições Nacionais de Matemática (WFNMC, sigla em inglês), pela contribuição à Matemática Olímpica. Entregue desde 1992, o Paul Erdös premia pesquisadores que atuam no desenvolvimento de desafios matemáticos, de forma a estimular a aprendizagem da disciplina.

Olimpíadas de Matemática

Em sua carreira olímpica, ganhou medalhas de ouro na Olimpíada Ibero-americana de Matemática (1989). Também obteve medalhas de bronze (1989) e ouro (1990) na Olimpíada Internacional de Matemática (IMO).

Olimpíada Ibero-americana de Matemática: Foi criada em 1985 com o objetivo de descobrir e incentivar os novos talentos matemáticos dos países ibero-americanos, além de dar a oportunidade da troca de experiências e promover relações de amizade entre estudantes e professores. No Brasil, a seletiva dos estudantes representantes tem como sua primeira fase a OBM (Olímpiada Brasileira de Matemática) e, como etapa seguinte, outros 5 testes de seleção. Esta olimpíada é dividida em 2 dias de prova: cada um deles com duração máxima de 4 horas e meia e com 3 problemas de Matemática que exploram os conhecimentos do competidor em Teoria dos Números, Álgebra, Geometria e Combinatória.

Olimpíada Internacional de Matemática: A IMO, pioneira entre as competições científicas internacionais, foi criada na Romênia em 1959. As questões abordadas nas provas envolvem várias áreas da disciplina, como aritmética, álgebra, equações lineares e quadráticas, polinômios e geometria, dentre outras. Porém, mais importante do que o conhecimento formal, a competição exige alto nível de abstração e análise.

Há sete anos, o matemático Gugu é o coordenador geral da Comissão de Olimpíadas de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática, na qual ingressou em 1992.

SIAMA

A primeira **SIAMA** - Semana de Integração Acadêmica da Matemática - ocorreu de 2 a 4 de maio de 2019, sob coordenação dos integrantes da atual gestão do Cento Acadêmico de Matemática, com o auxílio da professora Marinês Guerreiro, no Auditório do Prédio das Licenciaturas e no Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas.

A SIAMA contou, em sua programação, com diversos minicursos com os temas:"Construindo Sólidos geométricos com Origami"; "Construção do Conceito de Área a Partir dos Elementos de Euclides"; "Aprendendo a fazer Plano de Aula: Planejar para Ensinar"; "Vamos Conversar sobre Sistemas Dinâmicos"; "Grafos de Emparelhamento de Arestas de Polígonos Regulares"; "Noções de Lógica"; "Técnicas de Demonstração; Grupos de Simetria"; "Educação Financeira"; "Elaboração de Itens Matemáticos" e "O Som e o Sentido". Além disso, foi ministrada a palestra "Profissão Matemática: Desafios Possibilidades e Conquistas", com o convidado professor doutor Jhone Caldeira Silva (UFG), ex-aluno do Curso de Matemática da UFV. No evento, foi realizado o lançamento dos livros "Estruturas Algébricas para Licenciatura", Volumes 1 e 2, de autoria do professor Jhone. Houveram também debates, em formato de mesa redonda, com as temáticas "As áreas de pesquisa na Matemática", com os palestrantes Ady Junior, Anderson Araújo, Sônia Fernandes, Marli Moreira, Rejane Faria e Bulmer Garcia e "As Mídias no Ensino da Matemática" com a presença dos palestrantes Jhone Caldeira Silva e Gabriela Christina de Sá.

No dia 03/05 ocorreu um momento de descontração com uma apresentação, em parceria com o projeto CineMat, do filme "O quarto de Fermat" e no dia do encerramento houve uma mostra de pôsteres dos alunos da instituição sobre seus trabalhos de pesquisa.

Matemática para a Cidadania

O evento "Matemática para a Cidadania" ocorreu nos dias 26 a 28 de maio de 2019 no Auditório do Prédio das Licenciaturas (PLI) como parte das atividades desenvolvidas pelos estudantes na disciplina Mat 490 – Oficina de Matemática. Segundo a professora Marli Moreira, responsável pela MAT 490 em 2018-I, anteriormente, para a execução do projeto prático da disciplina, a turma deveria escolher um dos temas obrigatórios como atividades complementares, a saber Educação Ambiental, Educação para as Relações Étnico-raciais e Educação em Direitos Humanos, e organizar uma palestra sobre tal tema, ministrada por alguém competente no assunto. Porém, desta vez além de disponibilizar palestras sobre os três conteúdos, o projeto contou com oficinas variadas sobre tópicos de Matemática.

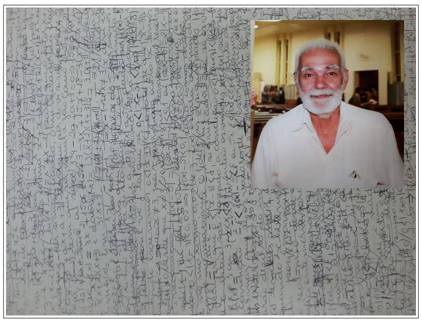
Programação do Evento

A organização partiu dos dezessete alunos frequentes na disciplina e as inscrições foram feitas virtualmente. As palestras foram ministradas por professores convidados de outros departamentos, como o professor Paulo César, do departamento de Direito, com a palestra sobre Ética, o professor Edson Fialho, do Departamento de Geografia, com a palestra sobre Educação Ambiental e o professor Thiago Mota, do Departamento de História, com a palestra sobre Relações Étnico-raciais. Além disso, o evento contou com diversas oficinas: Jogos Matemáticos; Bordado ponto cruz; História da Matemática; Malba Tahan, Matemática divertida e curiosa e Resolução de problemas: Experimentações possíveis. A última citada foi a única oficina ministrada pela professora convidada Rejane Schuwartz Faria, as outras foram todas confeccionadas pelos próprios alunos no decorrer da disciplina e ministradas por eles durante o evento. Para o encerramento foi organizada, pelos discentes, uma Mesa Redonda com a temática "A Matemática é..." que contou com a participação dos professores Marinês Guerreiro, Anderson T. da Silva, Jéssyca Gurjão, Edson Teixeira e Rogério Picanço do Departamento de Matemática. Houve ainda, durante a realização do evento, arrecadações de agasalhos para doação.

Nivaldo Guilherme, um dos estudantes responsáveis pela organização, enfatizou o trabalho coletivo durante a execução do evento. "Nós, enquanto estudantes de Matemática, não estamos acostumados a fazer trabalhos realmente em equipe e ao organizar o evento tivemos que aprender, na prática, a lidar com as divergências de opiniões e respeitar o espaço de trabalho do outro". A coordenadora da disciplina e orientadora do projeto, a professora Marli, afirma ainda que a intenção é fazer com que o evento aconteça regularmente todos os anos. Esta foi somente a primeira edição. Para conhecer mais sobre o projeto Matemática para a Cidadania, basta acessar o endereço eletrônico `https://sites.google.com/view/matemticacidadania`.

Professor Braz Moura Freitas (1949-2019)

Homenagem de professores do Departamento de Matemática ao professor Braz Moura Freitas, docente do DMA. Braz formou na primeira turma do Curso de Matemática da UFV, em 1976, e, naquele mesmo ano, se tornou professor do departamento. Em março deste ano recebemos a triste notícia do seu falecimento.



Profª. Marinês: O professor Braz sempre foi muito prestativo com as pessoas que chegavam ao DMA para serem seus colegas. Na época em que eu cheguei à Viçosa, ele me ajudou muito para eu aprender a dirigir o meu primeiro carro que foi um fusquinha! Sou muito grata a ele por esta ajuda!

Profª. Lana: O Braz era uma pessoa calma, humilde e gentil. Ele tratava a todos sejam alunos, servidores ou colegas com o mesmo respeito. Parecia que nada ou ninguém o tirava do sério. Ele tinha um lance curioso e único de usar um mesmo papel várias vezes, escrevendo por cima do que já estava escrito, usando cores de canetas diferentes. E ficava legível! Era uma pessoa muito querida. Sua leveza será sempre lembrada e sentida.

Profª. Catarina: O professor Braz sempre foi agradável, paciente e generoso. Isto que ficou depois de ser sua aluna. Com ele conferi que tendo oportunidade e muito esforço é possível superar a falta de base. Com seus colegas foi sempre muito respeitoso e pronto pra ajudar nos primeiros passos. E sabia tocar lindas melodias no violão. Fica agora a saudade.

Profª. Margareth: Quando ingressei no DMA/UFV, o Braz já fazia parte do corpo docente do departamento. Foram anos de um ótimo convívio profissional (nada formal), pontuados com brincadeiras e provocações. Ele tinha um ótimo senso de humor, o que tornava nossos dias mais leves. Deixou saudades!

Prof. Mercio: Lembro-me, quando fui seu aluno, que o Braz sempre foi uma pessoa muito ponderada, muito tranquilo e responsável, sempre olhava tanto o lado do aluno quanto o desenvolvimento do conteúdo que tinha que ser passado. E como professor do departamento, sempre foi uma pessoa muito tranquila e calma que presava pelo bom relacionamento com os colegas de trabalho e também com seus alunos. Profissionalmente, sempre presou pela harmonia do departamento em si e para que fosse um local agradável de trabalhar. Quando eu estava no cargo de Chefia do departamento, algumas das disciplinas de difícil alocação muitas das vezes recaiam sobre ele e este por sua vez nunca reclamou, pelo contrário, sempre as conduzia até o final. Algo em específico que marca minha lembrança quanto ao professor Braz foi em um evento de comemoração aos quarenta anos do departamento em que ele tocou uma música no violão e não sabíamos que ele tocava.

Prof. Allan: Eu estudei na UFV na minha graduação, mas não tive aula com o professor Braz. Eu me lembro dele como companheiro de trabalho. Ele era uma pessoa muito educada e também muito engraçada. Sempre contando piadas na sala do café ou pelos corredores do DMA. Falando de café, Braz era viciado nesta bebida. Acho que não existia sala de café na UFV que ele não conhecia. Lembro-me das vezes em que ele me convidou para tomar café nas salas de café no Departamento de Informática, no Departamento de Estatística e no PVA. Nestes momentos, ele sempre conversou com todos da sala. Estas conversas eram bem descontraídas e com muito bom humor. Apesar de sempre ter um ótimo humor, ele também falava sério quando era necessário. Quando uma discussão ficava séria, ele sempre tinha uma forma muito educada e sábia de falar sua visão sobre o assunto e acabava te convencendo de que ele estava certo. Vou lembrar dele como uma pessoa muito feliz e sábia.

Profª. Rosane: O Braz era muito dedicado e estava sempre disposto a ajudar os estudantes. Ele formou na primeira turma do curso de matamática da UFV. Creio que eu e todos os colegas do DMA temos uma mesma opinião a respeito do Braz, ele era muito querido. Cursei a graduação na UFV, tive o prazer de ser sua aluna na disciplina de MAT 131 e, como colega de departamento, lecionamos juntos uma disciplina de Cálculo II.

Profª. Ariane: Fui aluna do professor Braz em apenas uma disciplina. Recordo-me que, enquanto professor, ele ministrava sua aula com tranquilidade e simpatia. A maioria das minhas lembranças são como colega de profissão. Nunca o vi irritado ou preocupado, não se envolvia em questões polêmicas, nestas ocasiões ficava, pacientemente, em silêncio. Sem dúvida as lembranças mais marcantes que guardarei dele será o copo de café, que não saia de sua mão, o sorriso alegre, sempre estampado em seu rosto, e o "e aí, menina?", que ele expressava ao me ver.

Prof. Anderson Tiago: Fui aluno do professor Braz e o conheço desde o ano 2000. O Braz sempre foi um professor calmo e tranquilo. Sempre deixava um exercício no quadro para resolvermos durante a aula e enquanto isso, ele aproveitava esse tempo para fumar, o que o deixou famoso por isso. Enquanto colega de trabalho, posso dizer que ele sempre foi uma pessoa positiva, com ótimo humor e sempre brincalhão. De vez em quando pedia ajuda para resolver algum exercício difícil que havia visto em algum lugar e ficávamos alguns minutos pensando. O Braz era também um companheiro de café. Adorava essa bebida dos deuses e sempre nos encontrávamos juntamente com outros colegas na cozinha para o rito do cafezinho. Sentiremos falta do nosso colega.

Prof. Ady: Tive o privilégio de ter sido aluno e colega de trabalho do professor Braz. Ele era muito inteligente, alegre e carismático. Deixou um belo legado por onde passou! Conhecia a UFV como poucos. Muitas vezes descemos a "reta"da ufv juntos, batemos bons papos e, até chegar nas quatro pilastras, ele cumprimentava quase todos com bom humor e quase sempre de modo brincalhão. Certa vez, ao chegar na sala do Braz para uma de nossas reuniões de trabalho, ele estava preparando aula. Perguntei qual era a disciplina, ele me entregou uma folha completamente escrita, que não dava para entender quase nada, pois ele escrevia de cima para baixo e de baixo para cima na folha. Algo inusitado e autêntico que guardo de recordação e sempre mostro para meus alunos e colegas. O professor Braz ficará nas minhas lembranças como um conselheiro e amigo que faz muita falta.

Frase Favorita do professor Braz:

"Na vida só existem dois dias em que nada pode ser feito: ontem e amanhã. Portanto, hoje é o dia certo para amar, fazer, acreditar e, principalmente, viver."

-Dalai Lama

Professora Lais Moreira dos Santos (UFV)

Possui graduação em Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (2011), com período sanduíche na Universidade Técnica de Lisboa, mestrado em Matemática pela Universidade de Brasília (2013) e doutorado em Matemática pela Universidade de Brasília (2018). Foi professora na Universidade Federal do Oeste da Bahia de 2015 a 2018 e atualmente é Professora na Universidade Federal de Viçosa.

(1) ***Antes da UFV, já trabalhou em outras universidades? Se sim, quais?***

Sim. Em 2015 eu entrei na Universidade Federal do Oeste da Bahia, no campus de Luís Eduardo Magalhães. Saí da UFOB quando fui admitida na UFV, em setembro do ano passado.

(2) ***Durante esses anos, que funções acadêmicas você assumiu?***

Na UFOB, eu fui membro do colegiado dos cursos de Engenharia de Produção e Engenharia de Biotecnologia. Também fui vice coordenadora do Núcleo Docente de Ciências Exatas (NUDEX), que é formado pelos professores das áreas de Matemática, Química e Física, que atuam nas disciplinas iniciais dos cursos de Engenharia. Ainda na UFOB, fiz parte do Núcleo Docente Estruturante (NDE) de ambos os cursos Engenharia de Produção e Engenharia de Biotecnologia, cuja atribuição é o acompanhamento do projeto pedagógico dos cursos.

(3) ***Qual sua área de pesquisa?***

Minha área de pesquisa é Equações Diferenciais Parciais Elípticas, com enfoque em problemas com termo de reação fortemente singular.

(4) ***Qual dos seus projetos de pesquisa você considera mais importante?***

Atualmente, estou desenvolvendo um projeto de pesquisa em que o objeto de estudo é uma classe de Equações Diferenciais que surgem em modelos de Dinâmica de Populações. Esse estudo tem me chamado bastante atenção, não só pelos desafios matemáticos, mas também por toda a interpretação biológica dos resultados obtidos.

(5) ***Qual sua opinião/sugestão para a melhoria do nível de pesquisa no DMA?***

Acredito que para o avanço da Matemática, o trabalho cooperativo é imprescindível. Nesse sentido, medidas que viabilizem maior contato entre os docentes do DMA, e com pesquisadores externos, são essenciais. A criação de seminários de pesquisa, parcerias com outros departamentos da UFV e com universidades próximas, como UFJF e UFOP, podem contribuir para o fortalecimento dos grupos do DMA e, consequentemente, fomentar mais investimentos para a pesquisa.

(6) ***Como podemos criar atrativos no DMA para melhorarmos nossa pesquisa?***

A criação de eventos científicos e de seminários de pesquisa podem atrair estudantes e pesquisadores de outras instituições. A implantação de bolsas de Pós-Doutorado e de Professor Visitante são importantes mecanismos para o intercâmbio científico entre o DMA e outras universidades.

(7) ***Existe um grupo de pesquisa na sua área na UFV? Quando foi criado?***

Sim. O grupo "Equações Diferenciais e Aplicações" foi criado em 2011 e conta com a participação de vários professores do DMA.

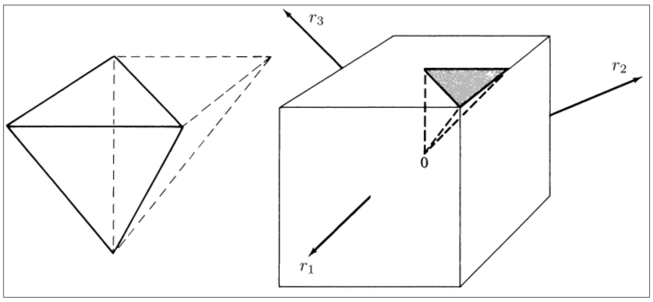
(8) ***Quem são os membros? Qual a frequência de seminários ou reuniões do grupo?***

Participam do grupo os professores Amarísio, Anderson Araújo, Ariane Entringer, Cristiane Valadares, Edir Leite, Edson Teixeira, Fernanda Oliveira, Jéssyca Lange, Lilian Neves, Luciana Bragança, Margareth Alves e Sandro Romero. Ainda não tive a oportunidade de me reunir com todos eles.

(9) ***Uma breve explicação sobre sua área de pesquisa, de 5 à 10 linhas, listando os principais focos e possíveis aplicações.***

O estudo de Equações Diferenciais Parciais se faz presente em vários contextos práticos. No estudo de dinâmica de populações, por exemplo, as equações elípticas com difusão não-linear podem descrever o comportamento estacionário da densidade populacional de uma dada espécie. É de particular interesse, por exemplo, saber se a espécie sobreviverá ou qual é a influência da taxa de natalidade intrínseca na sobrevivência da espécie. Em termos matemáticos, essas questões são abordadas por meio do estudo de existência de soluções positivas e da análise da bifurcação do continuum de soluções do problema considerado. Nesse sentido, técnicas como Teoria da Bifurcação, Métodos de Sub e Supersolução e Métodos Variacionais são usualmente empregadas.

Grupos de Coxeter



Frederico de Oliveira Souza,

Em 1934, H.S.M. Coxeter deu o primeiro tratamento compreensivo sobre os grupos finitos de reflexões, que hoje são chamados, em sua homenagem, **grupos de Coxeter**. Em um de seus artigos, ele classificou completamente esses grupos e derivou suas principais propriedades, utilizando principalmente métodos geométricos. Coxeter classificou não somente os grupos finitos de reflexões, mas também os grupos discretos infinitos gerados por reflexões (afins), utilizando os chamados grafos de Coxeter. Os grupos de Coxeter são utilizados na Teoria de Invariantes, na classificação dos grupos e álgebras de Lie, que têm aplicações em Geometria Diferencial, Física e Equações Diferencias Ordinárias, além de auxiliar na resolução do *Problema da Palavra* em Teoria de Grupos. Tais grupos também são utilizados no estudo da teoria clássica dos invariantes, que foi uma fonte importante para muitos dos conceitos e ideias atuais da Álgebra Comutativa e Álgebra Homológica.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, com $\langle \cdot , \cdot \rangle$ um produto interno fixo. Denotamos por $\mathcal{O}(V)$ o grupo das transformações ortogonais de V. Os grupos nos quais estamos interessados são uma classe importante de subgrupos finitos de $\mathcal{O}(V)$, os que são gerados por reflexões. Uma *reflexão em V* é uma transformação ortogonal S que leva cada vetor em sua imagem espelhada em relação a um hiperplano fixado $\mathcal{P}$ de V, isto é, $Sx = x$, se $x \in \mathcal{P}$, e $Sx = -x$, se $x \in \mathcal{P}^{\perp}$. Escolhendo um vetor $0 \neq r \in \mathcal{P}^{\perp}$ e definindo a transformação S_r tal que

$$S_r x = x - 2\,\frac{\langle x, r\rangle}{\langle r, r\rangle} r, \text{ para todo } x \in V,$$

temos $S_r r = -r$ e $S_r x = x$, se $x \in \mathcal{P}$. Logo, $S_r = S$ e esta transformação é chamada de *reflexão através de $\mathcal{P}$* ou *ao longo de r*.

Sistemas de raízes

Seja G um subgrupo de $\mathcal{O}(V)$ e S uma reflexão através de $\mathcal{P}$. Os dois vetores unitários $\pm r$ que são perpendiculares a $\mathcal{P}$ são chamados *raízes de* **G**. Um *sistema de raízes* de um grupo de Coxeter G, denotado por Δ, é o conjunto de todas as raízes correspondentes às reflexões geradoras de G, junto com suas imagens por todas as transformações de G (que também são raízes de G).

Escolha $t \in V$ tal que $\langle t, r\rangle \neq 0$, para toda raiz r de G. Assim o sistema de raízes Δ é particionado em dois subconjuntos:

$$\Delta_t^+ = \{r \in \Delta \;/\; \langle t, r\rangle > 0\} \quad \text{e} \quad \Delta_t^- = \{r \in \Delta \;/\; \langle t, r\rangle < 0\}.$$

Observe que se $r \in \Delta$, então $-r \in \Delta$, donde $r \in \Delta_t^+$ se, e somente se, $-r \in \Delta_t^-$. Logo, Δ é particionado em dois subconjuntos de mesma cardinalidade. Agora, tome um subconjunto Π de Δ_t^+ mínimo em relação à propriedade de que todo $r \in \Delta_t^+$ é combinação linear, com todos os coeficientes não negativos, dos elementos de Π. Tal subconjunto é chamado *t-base para Δ*.

Teorema 1. *Existe uma única t-base para Δ e, se Π é uma t-base para Δ, então Π é uma base para V.*

Exemplo: Considere $V = \mathcal{H}_2^4$, o grupo diedral de ordem 8. As quatro reflexões de V geram V e temos $\Delta = \{\pm(1,0), \pm(0,1), (\pm 1, \pm 1)\}$. Escolhendo

$$t = 2\left(\cos\!\left(\frac{3\pi}{8}\right), \sin\!\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right),$$

temos $\Delta_t^+ = \{(1,0),(1,1),(0,1),(-1,1)\}$ e $\Pi = \{(1,0),(-1,1)\}$. As raízes na base Π são chamadas *raízes fundamentais* e as reflexões ao longo das raízes de Π são chamadas *reflexões fundamentais de G*.

Regiões fundamentais

Sejam $\Pi = \{r_1, \ldots, r_n\}$ e $F = \{x \in V \;/\; \langle x, r_i\rangle > 0$, para todo $r_i \in \Pi\}$. Note que $F = \cap_{i=1}^n \{x \in V \;/\; \langle x, r_i\rangle > 0\}$ é a interseção dos semiespaços determinados pelos hiperplanos $\mathcal{P}_i = r_i^{\perp}$, com $r_i \in \Pi$. O conjunto F é chamado de *região fundamental para G em V*.

Exemplo: Considere o cubo centrado na origem, cujos vértices são os oito pontos $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ e seja $G \leq \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ o grupo de simetrias desse cubo. As nove reflexões de G o geram e temos $\Delta = \{\pm r_1, \ldots, \pm r_9\}$, com

$$\begin{array}{lll} r_1 = (1,0,0) & r_2 = (-1,1,0) & r_3 = (0,-1,1) \\ r_4 = (0,1,0) & r_5 = (-1,0,1) & r_6 = (1,1,0) \\ r_7 = (0,0,1) & r_8 = (0,1,1) & r_9 = (1,0,1) \end{array}$$

Se $t = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$, então $\langle t, r_i\rangle \neq 0$, para toda raiz r_i de G. Assim, $\Delta_t^+ = \{r_1, \ldots, r_9\}$ e $\Pi = \{r_1, r_2, r_3\}$. Observe que a região fundamental para G, apresentada à esquerda da figura acima, é um tetraedro regular. No cubo mostrado à direita da mesma figura, apenas para facilitar a visualização, as raízes r_1, r_2 e r_3 estão deslocadas, de modo que elas partem da superfície do cubo, e não da origem. A região sombreada é a interseção da região fundamental de G com o cubo.

Referências:

[1]- L. C. Grove, C. T. Benson, *Finite Reflection Groups,* Springer-Verlag, 1985.

[2]- J. E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups,* Cambridge University Press, 1990.

Conjunto de Simetria Invariante Afim

A visão humana sempre procura por algo que seja agradável aos olhos. E se tem uma característica que é atraente à nossa visão, sem dúvida, é a simetria.

Diego Trindade,

A simetria tem recebido grande atenção por parte dos matemáticos, biólogos e comunidades da visão computacional. Isto se deve ao fato de que as simetrias são utilizadas numa grande variedade de aplicações do mundo real, como, por exemplo, no reconhecimento e reconstrução de objetos, tais como tomografia computadorizada e Imagens Geradas por Computador (CGI). Esta última, por sua vez, é uma aplicação no campo da computação gráfica para construção de efeitos especiais em artes, filmes, comerciais, simuladores etc.

O objetivo principal deste trabalho foi estudar conjuntos de simetria de curvas planas em uma geometria não euclidiana, a saber, a Geometria Afim. A ideia principal da Geometria Diferencial Afim de curvas planas é definir um novo parâmetro que seja invariante por transformações afins.

Os conjuntos de simetria invariantes por transformações afins foram apresentados inicialmente por P. Giblin e G. Sapiro. A ideia dos autores foi imitar a construção dos conjuntos de simetria euclidianos para o caso afim.

Na geometria diferencial afim, existem dois conjuntos de simetria distintos, a saber, o *Affine Envelope Symmetry Sets* (AESS) e o *Affine Distance Symmetry Set* (ADSS). Aqui será apresentado um pouco a respeito do ADSS.

Geometria diferencial afim de curvas planas

Dada uma curva regular $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ fechada e estritamente convexa (oval), dizemos que γ está parametrizada pelo comprimento de arco afim s (p.p.c.a.a) se, e somente se,

$$[\gamma_s, \gamma_{ss}] = 1, \ \forall\ s \in I,$$

com $[\cdot,\cdot]$ a notação usada para determinantes. Os vetores γ_s e γ_{ss} são o *tangente afim* e *normal afim*, respectivamente.

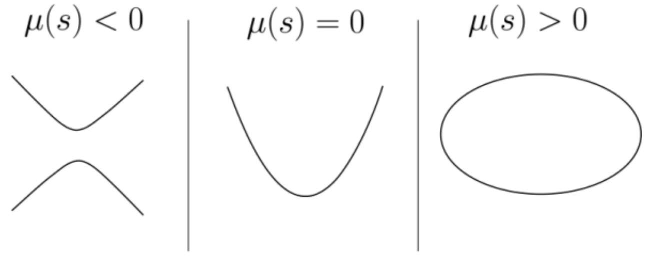
É interessante perceber que, ao contrário do que acontece na Geometria Euclidiana, aqui, o vetor normal afim não tem uma relação angular em relação ao tangente afim, isto é, eles não necessariamente formam um ângulo reto.

Se $\gamma = \gamma(t)$ é uma parametrização regular qualquer da curva γ, com $k(t) = [\gamma_t, \gamma_{tt}]$, o tangente afim e normal afim, são, respectivamente:

$$\gamma_s = k^{\frac{1}{3}}\gamma_t \ \ e \ \ \gamma_{ss} = k^{-\frac{2}{3}}\gamma_{tt} - \frac{1}{5}k'k^{-\frac{5}{3}}\gamma_t.$$

No caso em que γ está p.p.c.a.a, tem-se $[\gamma_s, \gamma_{sss}] = 0$, isto é, $\gamma_{sss} + \mu\gamma_s = \overrightarrow{0}$, em que $\mu(s)$ é uma função real. A função $\mu(s) = [\gamma_{ss}, \gamma_{sss}]$ é a *curvatura afim* da curva γ e é o mais simples não-trivial invariante diferencial afim.

Teorema. *Uma curva γ tem curvatura afim constante se, e somente se, γ é uma cônica.*



Uma curva γ tem um **vértice afim ordinário** (de ordem superior) em s_0, se $\mu(s_0) \neq 0$ e $\mu_s(s_0) = 0$, com $\mu_{ss}(s_0) \neq 0$ ($\mu_{ss}(s_0) = 0$).

Os vértices de γ correspondem a pontos singulares da sua evoluta afim ($ev_\gamma(s) = \gamma(s) + 1/\mu(s)\gamma_{ss}(s)$), os quais são chamados de pontos sextáticos (centro de cônicas que fazem 6-contato [1]).

Na Geometria Diferencial Afim é necessária uma distância que seja invariante por transformações afins. Sejam $X \in \mathbb{R}^2$ e γ uma curva p.p.c.a.a, a *distância afim* entre X e $\gamma(s)$ é definida por $d(X, \gamma(s)) := [X - \gamma(s), \gamma_s(s)]$.

Conjunto de Simetria Invariante Afim - *ADSS*

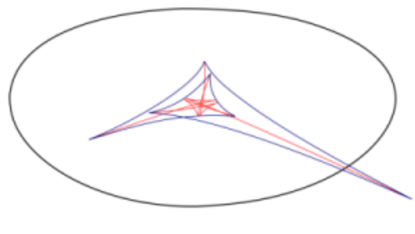
Com base na distância afim, o Conjunto de Simetria Invariante Afim ($ADSS$) de uma curva $\gamma(s)$ p.p.c.a.a é o fêcho do seguinte conjunto:

$$\{X \in \mathbb{R}^2 \mid \exists\ s_1, s_2 \in I, s_1 \neq s_2; d(X, \gamma(s_1)) = d(X, \gamma(s_2)) \text{ e } d_s(X, \gamma(s_1)) = d_s(X, \gamma(s_2)) = 0\}.$$

Existe uma condição para que dois pontos distintos da curva, $\gamma(s_1)$ e $\gamma(s_2)$, gerem um ponto $X \in ADSS$ e, uma vez satisfeita essa condição, é possível explicitar uma parametrização para esse ponto.

Teorema. *Dados $s_1, s_2, s_1 \neq s_2$ no pré-ADSS, então um ponto X no $ADSS$ é dado por*

$$X = \gamma(s_1) + \frac{[\gamma(s_1) - \gamma(s_2), \gamma_{ss}(s_1)]}{[\gamma_{ss}(s_2), \gamma_{ss}(s_1)]}\gamma_{ss}(s_1).$$



Curva γ (preto), ADSS (vermelho) e Evoluta Afim (Azul)

Algumas propriedades a respeito do $ADSS$:

Proposição. *Seja $X(v) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma parametrização do $ADSS$ e $s_1(v), s_2(v)$ os pontos correspondentes em γ, onde s é o p.c.a.a. de γ. Então:*

- *o tangente ao $ADSS$ é paralelo a $\gamma_s(s_1) - \gamma_s(s_2)$;*

[1][Def.:] α e β têm k-contato em $t = t_0$, se $\alpha^{(i)}(t_0) = \beta^{(i)}(t_0)$, para $i = 0 \cdots k-1$ e $\alpha^{(k)}(t_0) \neq \beta^{(k)}(t_0)$.

- *a reta tangente ao ADSS e as duas retas tangentes à curva γ nos respectivos pontos $\gamma(s_1), \gamma(s_2)$ se intersectam em um ponto;*
- *Os pontos finais do ADSS ocorrem na evoluta afim.*

Todo ponto de γ contribui para o *ADSS* :

Teorema. *Seja $\gamma(s)$ um oval. Então para todo ponto não sextático existem pelo menos dois valores s, s_0 tais que $\gamma(s), \gamma(s_0)$ dão um ponto X no ADSS. Se $\gamma(s_0)$ é sextático então existe pelo menos um valor de $s \neq s_0$.*

Referências:

[1]- P. J. GIBLIN; G. SAPIRO; *Affine-Invariant Distances, Envelopes and Symmetry Sets,* Geometriae Dedicata, n. 71, p. 237-261, 1998.
[2]- P. A. HOLTOM; *Affine-invariant symmetry sets,* Ph.D. Thesis, University of Liverpool, 2000.

Desafios Matemáticos

André Junqueira

Nesta edição da coluna Desafios Matemáticos vamos falar e propor um problema que relaciona duas áreas extremamentes relevantes que são a Teoria das Probabilidades e a Teoria dos Números. A Teoria das Probabilidades tem origem muito antiga e normalmente associada ao estudo das possibilidades de ganhos em jogos de azar. No século XVIII, aconteceu um impulso importante com a axiomatização dessa teoria por Pierre Simon Laplace que, junto à criação da integral de Lebesgue, no início do século XX, permitiu que a Teoria das Probabilidades atingisse uma importância vital para o desenvolvimento da ciência. Uma outra área muito relevante na Matemática é a Teoria dos Números, na qual os números primos têm um destaque especial, em virtude de enunciados simples de certos problemas, o que permite uma exposição para um público mais geral, embora as soluções possam ser bem complexas. Muitas vezes em Teoria dos Números pode ser muito difícil provar que um certo número tem uma propriedade e assim podemos estudar a probabilidade que um número tenha essa propriedade ou também estudar alguma propriedade estatística associada. Nesse cenário, surgiu a chamada Teoria Probabilística dos Números que iniciou nos primórdios do século XX, principalmente com os trabalhos de Paul Erdös dentre outros. Para finalizar apresentamos um desafio de Teoria Probabilística dos Números:

Problema: Dados dois números naturais escolhidos aleatoriamente, determine a probabilidade de que eles sejam primos entre si.

Sugestão: Para resolver esse problema use a igualdade $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{\pi^2}{6}$.

NOTÍCIAS DO DMA

Minicursos de Lógica 2019-II

O projeto Lógica Matemática, Aprendizagem e Cidadania oferecerá minicursos de Lógica em módulos ao longo do segundo semestre de 2019. Maiores informações no Facebook do projeto.

Novo Chefe no DMA

Em 03/06/2019, o professor Bulmer Mejía García tomou posse da Chefia do Departamento de Matemática da UFV. Desejamos ao professor Bulmer sucesso em sua gestão.

Novo Coordenação do PPGM

Desde o Julho de 2019, o Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGM) da UFV está sob a coordenação do professor Dr. Alexandre Miranda Alves. Desejamos sucesso ao Professor Alexandre na coordenação.

Nova Docente no DMA

Desde o dia 25/03/2019, o DMA conta com a atuação da docente Drª. Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria. Anteriormente, ela era docente da UFPA (Universidade Federal do Pará). Desejamos boas-vindas à professora Rejane.

Referências:

1- *https://impa.br/*
2- *https://super.abril.com.br/*
3- *https://imaginariopuro.wordpress.com/*
4- *https://www.objetivo.br/default.asp*
5- *https://pcb.org.br/portal2/20441/gugu-matematico-campeao-e-militante-comunista/*

Agradecimento: Agradecemos o apoio dos membros do grupo do Jornal da Matemática, em particular, o Prof. André Junqueira da Silva Corrêa e o Prof. Ady Cambraia Junior que nos ajudaram na edição final desta versão.